BARISAN GEOMETRI DALAM TANGGA NADA DIATONIS

Purwoko*)

Abstrak

Matematika akan lebih menarik bila diterapkan dalam kehidupan nyata. Barisan geometri adalah satu di antaranya. Barisan geometri 13 suku dengan rasio $2^{1/12}$ *adalah barisan frekuensi tangga nada diatonis dalam satu oktaf. Tulisan ini akan menganalisis secara numerik frekuensi nada-nada diatonis dan jarak frets pada gitar. Pada bagian akhir akan ditawarkan alternatif pembelajaran barisan geomatri di sekolah dan aplikasinya dalam mata pelajaran lain.*

PENDAHULUAN

Pythagoras (dalam Bergamini, 1991:43) telah membuktikan bahwa harmoni nada merupakan perbandingan frekuensi yang sangat sederhana, yaitu: C/c =1/2, C/G = 2/3, C/F =3/4, C/E = 4/5, C/D = 5/6, C/A = 5/8, dan C/B = 8/15. Dalam jarak waktu yang cukup lama, Marsenne (dalam Prawirohartono, 2007: 376) berhasil membuktikan bahwa nada oktaf atas berfrekuensi 2 kali, dan mempunyai panjang dawai ½ kali. Bertolak dari kedua penemuan itu, tulisan ini mencoba membandingkan frekuensi nada diatonis yang dihitung menggunakan barisan kuint atas dan oktaf bawah dengan frekuensi nada diatonis yang dihitung menggunakan barisan geometri.

Nada-nada dalam Sistem Diatonis.

Dalam sistem nada diatonis terdapat 12 nada, yaitu C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, dan B, dengan jarak masing-masing setengah nada. Tinggi nada c adalah setengah nada di atas nada B. Dengan demikian maka nada c berjarak 12 kali ½ nada. Tabel 1 di bawah ini menjelaskan perbandingan frekuensi nada dan jarak nada dalam sistem diatonis.

TABEL 1
NADA DIATONIS, FREKUENSI DAN INTERVAL
MENURUT PYTHAGORAS

NADA	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	c
Freku-ensi	a		$\frac{6}{5}a$		$\frac{5}{4}a$	$\frac{4}{3}a$		$\frac{3}{2}a$		$\frac{8}{5}a$		$\frac{15}{8}a$	$\frac{2}{1}a$
Inter-val	*prime*		*seconde*		*tertz*	*kuartz*		*kuint*		*sect*		*septime*	*octaf*

Diadaptasi dari Banoe (2003:48)

*)*Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNSRI*

Menentukan Frekuensi Nada menggunakan Barisan Kuint Atas dan Oktaf Bawah

Misalkan nada C mempunyai frekuensi a Hz, maka nada kuint atasnya adalah G, mempunyai frekuensi $\frac{3}{2}a$ Hz. Selanjutnya nada kuint atas dari G adalah d, mempunyai frekuensi $\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$ Hz. Karena nada D merupakan oktaf bawah dari nada d, maka frekuensi nada D adalah $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$ Hz. Selanjutnya nada kuint atas dari nada D adalah nada A, mempunyai frekuensi $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$ Hz = $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$ Hz.

Dengan cara yang sama, secara keseluruhan akan diperoleh hasil sebagai berikut:

TABEL 2
PERHITUNGAN FREKUENSI NADA DIATONIS
DENGAN BARISAN KUINT ATAS DAN OKTAF BAWAH

INTERVAL	NADA	FREKUENSI
-	C	a Hz
Kuint Atas	G	$(3/2)a$ Hz
Kuint Atas $\Rightarrow$ *Oktaf Bawah*	D	$(1/2)(3/2)^2 a$ Hz
Kuint Atas	A	$(1/2)(3/2)^3 a$ Hz
Kuint Atas $\Rightarrow$ *Oktaf Bawah*	E	$(1/2)^2(3/2)^4 a$ Hz
Kuint Atas	B	$(1/2)^2(3/2)^5 a$ Hz
Kuint Atas $\Rightarrow$ *Oktaf Bawah*	F#	$(1/2)^3(3/2)^6 a$ Hz
Kuint Atas $\Rightarrow$ *Oktaf Bawah*	C#	$(1/2)^4(3/2)^7 a$ Hz
Kuint Atas	G#	$(1/2)^4(3/2)^8 a$ Hz
Kuint Atas $\Rightarrow$ *Oktaf Bawah*	D#	$(1/2)^5(3/2)^9 a$ Hz
Kuint Atas	A#	$(1/2)^5(3/2)^{10} a$ Hz
Kuint Atas – Oktaf Bawah	F	$(1/2)^6(3/2)^{11} a$ Hz
Kuint Atas	c	2 a Hz

Bentuk umum suku-suku barisan kuint atas dan oktaf bawah adalah:

$$U_{(7j+1)\bmod 12} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor j/2 \rfloor}\left(\frac{3}{2}\right)^{j}, & j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}\left(\frac{3}{2}\right)^{j}, & j = 7, 9, 11 \end{cases}$$

Khusus untuk $j = 5$, maka $U_{(7j+1) \bmod 12}$ ditulis sebagai U_{12}, dan untuk $j = 12$, $U_{(7j+1)}$ ditulis sebagai U_{13}.
Tabel 3 di bawah ini menyajikan perbandingan frekuensi nada diatonis dalam bentuk desimal.

TABEL 3
PERHITUNGAN FREKUENSI NADA DIATONIS
MENGGUNAKAN BARISAN KUINT ATAS DAN OKTAF BAWAH
DENGAN BANTUAN PROGRAM *MICROSOFT EXCEL*

j	SUKU KE n	NADA	PERBANDINGAN FREKUENSI
0	1	C	1.000
1	8	G	1.500
2	3	D	1.125
3	10	A	1.688
4	5	E	1.266
5	12	B	1.898
6	7	F#	1.424
7	2	C#	1.068
8	9	G#	1.602
9	4	D#	1.201
10	11	A#	1.802
11	6	F	1.352
12	13	c	2.000

Barisan Geometri

Barisan geometri adalah pemetaan f: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, yang didefinisikan oleh

$$f(n) = ar^n,$$

dengan $a, r \in \mathbf{R} - \{0\}$.
Secara umum barisan geometri dapat dituliskan sebagai: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$
a disebut suku ke-1 dan r disebut rasio (Kerami, 1999:28). Di antara dua suku barisan geometri dapat disisipkan m suku barisan dengan $r' = r^{1/(m+1)}$

Barisan Geometri untuk Frekuensi Nada Diatonis.

Misalkan nada C berfrekuensi a Hz, maka nada c berfrekuensi $2a$ Hz. Dengan demikian maka frekuensi 11 nada di antara C dan C merupakan suku-suku barisan geometri yang disisipkan dengan rasio $2^{1/12}$. Dengan demikian diperoleh barisan dengan nada C sebagai suku-1 dan nada C sebagai suku ke-13, yaitu:

TABEL 4
FREKUENSI NADA DIATONIS SEBAGAI
SUKU-SUKU BARISAN GEOMETRI

NADA	SUKU KE	FREKUENSI
C	1	a
C#	2	$2^{1/12}a$
D	3	$2^{2/12}a$
D#	4	$2^{3/12}a$
E	5	$2^{4/12}a$
F	6	$2^{5/12}a$
F#	7	$2^{6/12}a$
G	8	$2^{7/12}a$
G#	9	$2^{8/12}a$
A	10	$2^{9/12}a$
A#	11	$2^{10/12}a$
B	12	$2^{11/12}a$
c	13	$2a$

Tabel 5 berikut ini menyajikan perbandingan frekuensi nada diatonis dengan ketelitian 3 angka di belakang koma.

TABEL 5
PERHITUNGAN FREKUENSI NADA DIATONIS
MENGGUNAKAN BARISAN GEOMETRI
DENGAN BANTUAN PROGRAM *MICROSOFT EXCEL*

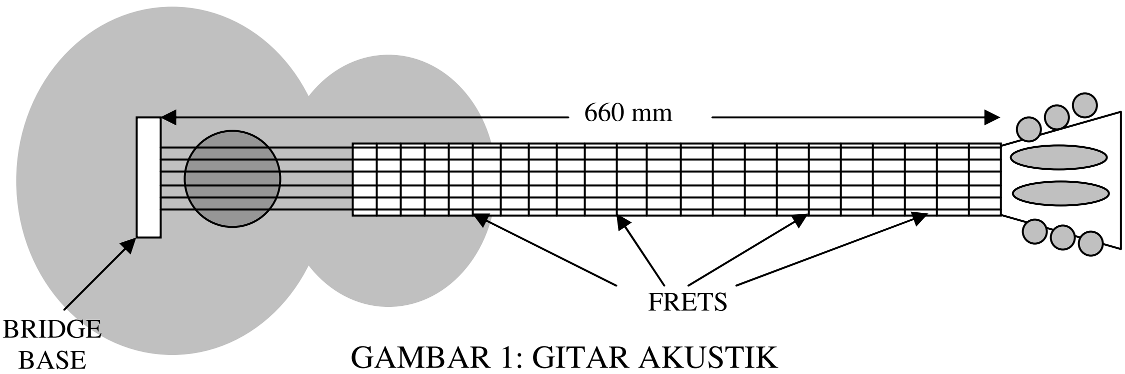
NADA	PERBANDINGAN FREKUENSI	FREKUENSI DALAM SATUAN Hertz
C	1.000	256
C#	1.059	271
D	1.122	287
D#	1.189	304
E	1.260	323
F	1.335	342
F#	1.414	362
G	1.498	384
G#	1.587	406
A	1.682	431
A#	1.782	456
B	1.888	483
c	2.000	512

Barisan Geometri untuk Panjang Dawai pada Gitar

Pandang sebuah gitar dengan panjang dawai 660 mm. Misalkan dawai ke-1 pada gitar dengan nada E panjangnya *p* millimeter, maka nada e mempunyai panjang dawai 1/2 *p* mm. Dengan demikian maka panjang dawai untuk nada-nada di antara E dan e merupakan barisan geometri dengan rasio $2^{-1/12}$.Untuk menghasilkan nada yang tepat, maka jarak *frets* ke *bridge* adalah sebagai berikut:

TABEL 6
PERBANDINGAN PANJANG DAWAI
NADA DIATONIS SEBAGAI SUKU-SUKU BARISAN GEOMETRI

NADA	SUKU KE	PANJANG DAWAI
E	1	p
F	2	$2^{-1/12}p$
F#	3	$2^{-2/12}p$
G	4	$2^{-3/12}p$
G#	5	$2^{-4/12}p$
A	6	$2^{-5/12}p$
A#	7	$2^{-6/12}p$
B	8	$2^{-7/12}p$
c	9	$2^{-8/12}p$
c#	10	$2^{-9/12}p$
d	11	$2^{-10/12}p$
d#	12	$2^{-11/12}p$
e	13	$2^{-1}p$



GAMBAR 1: GITAR AKUSTIK
(diadaptasi dari Koizumi, halaman 2)

TABEL 7
PERHITUNGAN PANJANG DAWAI NADA DIATONIS
MENGGUNAKAN BARISAN GEOMETRI
DENGAN BANTUAN PROGRAM *MICROSOFT EXCEL*

NADA	PERBANDINGAN PANJANG DAWAI	PANJANG DAWAI DALAM SATUAN milli meter
E	1.000	660
F	0.944	623
F#	0.891	588
G	0.841	555
G#	0.794	524
A	0.749	494
A#	0.707	467
B	0.667	440
c	0.630	416
c#	0.595	392
d	0.561	370
d#	0.530	350
e	0.500	330

Karena mengukur panjang dawai lebih mudah dari pada mengukur frekuensi, maka perhitungan panjang dawai dapat dijadikan alternatif penentuan nada-nada diatonis.

Analisis Galat Frekuensi Nada Diatonis

Ketelitian hasil perhitungan frekuensi nada diatonis dengan barisan kuint atas-oktaf bawah dapat dilakukan dengan menghitung galat nisbi, dengan formula yang diadaptasi dari Susila (1992:7):

$$Galat\ Nisbi = \frac{|f_{ko} - f_g|}{f_g} \times 100\%$$

dengan: f_{ko} = frekuensi dihitung dengan barisan kuint-oktaf

f_g = frekuensi dihitung dengan barisan geometri

TABEL 8

PERHITUNGAN GALAT NISBI FREKUENSI NADA DIATONIS YANG DIHITUNG MENGGUNAKAN BARISAN KUINT ATAS DAN OKTAF BAWAH TERHADAP FREKUENSI NADA DIATONIS YANG DIHITUNG MENGGUNAKAN BARISAN GEOMETRI DENGAN BANTUAN PROGRAM *MICROSOFT EXCEL*

j	SUKU KE n	NADA	PERBANDINGAN FREKUENSI (barisan kuint-oktaf)	PERBANDINGAN FREKUENSI (barisan geometri)	GALAT NISBI
0	1	C	1.000	1.000	0.00%
7	2	C#	1.068	1.059	0.79%
2	3	D	1.125	1.122	0.23%
9	4	D#	1.201	1.189	1.02%
4	5	E	1.266	1.260	0.45%
11	6	F	1.352	1.335	1.25%
6	7	F#	1.424	1.414	0.68%
1	8	G	1.500	1.498	0.11%
8	9	G#	1.602	1.587	0.91%
3	10	A	1.688	1.682	0.34%
10	11	A#	1.802	1.782	1.14%
5	12	B	1.898	1.888	0.57%
12	13	C'	2.000	2.000	0.00%

Pada Tabel 7 di atas tampak bahwa galat terbesar terjadi pada nada F, yaitu 1,25%. Galat ini tidak signifikan apabila nada-nada sudah mengalun dalam sebuah harmoni.

Pembelajaran Barisan di SMA

Barisan dipelajari oleh siswa SMA kelas X (Depdiknas, 2004). Siswa belajar barisan aritmetika lebih dahulu, baru kemudian belajar barisan geometri. Barisan aritmetika melalui contoh-contoh sebagai berikut:

1) {1,2,3,4,5, ... } disebut barisan bilangan asli.
2) {2,4,6,8, ... } disebut barisan bilangan asli genap.
3) {1,3,5,7, ... } disebut bilangan asli ganjil.

Untuk barisan aritmetika disepakati lambang-lambang:

U_n sebagai suku ke-n

a sebagai suku ke-1

b sebagai beda, $b = U_n - U_{n-1}$
Hubungan antar konsep di atas adalah: $U_n = a + (n - 1)b$.
Jika di antara dua suku disisipkan *m* suku baru, maka beda baru $b' = b/(m+1)$.

Selanjutnya siswa belajar barisan geometri melalui beberapa contoh:
1) {1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000}
adalah barisan metrik satuan panjang: 1 km = 10 hm = 100 dam = 1.000 m = 10.000 dm = 100.000 cm = 1.000.000 mm.
2) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\}$ adalah bariran peluruhan unsur radio aktif yang terkandung dalam suatu zat tertentu, dengan waktu paroh t.
3) $\{1, 2^{1/12}, 2^{2/12}, 2^{3/12}, 2^{4/12}, 2^{5/12}, 2^{6/12}, 2^{7/12}, 2^{8/12}, 2^{9/12}, 2^{10/12}. 2^{11/12}, 2^{12/12} = 2\}$
adalah barisan perbandingan frekuensi dalam tangga nada diatonis:
C, C#, D, D#, E, F, G, G#, A, A#, B, C
Untuk barisan geometri disepakati lambang-lambang:
U_n sebagai suku ke-*n*
a sebagai suku ke-*1*
r sebagai rasio, $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$ *1*
Hubungan antar konsep di atas adalah: $U_n = ar^{n-1}$.

Jika di antara dua suku disisipkan *m* suku baru, maka rasio baru $r' = r^{1/(m+1)}$.
Selanjutnya, hasil belajar barisan geometri dapat diterapkan dalam mata pelajaran lain, seperti: musik (tangga nada), fisika (bunyi), ekonomi (bunga berganda), biologi (pertumbuhan bakteri), dan kimia (peluruhan unsur radioaktif).

PENUTUP

Matematika dan musik merupakan karya intelektual manusia yang berhubungan. Ini berarti bahwa keindahan musik akan semakin tinggi apabila dalam pengembangannya melibatkan matematika. Kehidupan seorang ilmuwan akan semakin harmonis bila ia juga memainkan musik di sela-sela kesibukannya. Penerapan barisan geometri dalam perhitungan frekuensi nada diatonis atau panjang dawai gitar adalah bukti bahwa matematika dan musik merupakan sumber keindahan.

DAFTAR PUSTAKA

Banoe, Pono. 2003. *Pengantar Pengetahuan Harmoni.* Yogyakarta: Kanisius.
Bergamini, David. 1981. *Matematika.* Jakarta: Tira Pustaka.
Depdiknas. 2004. *Kurikulum Sekolah Menengah Atas.* Jakarta.
Kerami, Djati. dkk. 1999. *Kamus Matematika.* Jakarta: Balai Pustaka.
Koizumi, Tadashi. ____. *Yamaha Guitar Course Fundamental.*
Penney, David E. 1972. *Perspectives in Mathematics.* California: W. A. Benjamin, Inc.
Prawirohartono, Slamet dkk. 2007. *Ilmu Pengetahuan Alam untuk SMP/MTs.* Jakarta: Bumi Aksara.
Susila, I Nyoman. 1993. *Dasar-Dasar Metode Numerik.* Jakarta: Ditjen Dikti.